

ЛЕКЦИЯ № 10

Вынужденные линейные колебания.

Бросая в воду камушки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков

В предыдущей лекции мы рассмотрели так называемые *свободные линейные колебания*. Вместе с тем, в реальной ситуации всегда имеется какое-либо внешнее воздействие на систему. Оно может скомпенсировать затухание колебаний из-за наличия трения, обеспечивая их стационарность. Кроме того, в случае периодического воздействия мы получаем важный инструмент исследования физических систем – так называемые *резонансные методы*. Они позволяют экспериментально находить внутренние параметры физических сред.

В общем случае зависящее от времени воздействие на систему заключается во временной зависимости ее потенциальной энергии. В том случае, когда в отсутствие временной зависимости она обладала минимумом в точке $x=0$ и допускала колебательные движения вблизи этого минимума, при включении зависимости от времени и при малых амплитудах движения потенциальную энергию можно разложить в ряд по степеням малых смещений x . Это разложение имеет следующий вид:

$$U(x,t) \approx U(0,t) + x \left. \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \frac{x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} + \dots \quad (10.1)$$

Поскольку произвольное слагаемое, зависящее от времени, может быть отброшено в функции Лагранжа, то первое слагаемое в (10.1) можно не учитывать. Из определения силы, второе слагаемое в (10.1) сводится к $-x F(t)$. В третьем слагаемом мы выделим часть, не зависящую от времени, и представим его в виде $kx^2/2 - x^2 f(t)/2$. Подставляя такое выражение для потенциальной энергии в уравнение Ньютона $m\ddot{x} = -dU/dx$, получаем его в следующем виде:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) + xf(t). \quad (10.2)$$

Заметим, что два слагаемых в правой части имеют одинаковое происхождение из разложения потенциальной энергии. Однако, влияние их на вынужденную динамику осциллятора разное. Перепишем уравнение (10.2) в несколько другом виде:

$$m\ddot{x} + (k - f(t))x = F(t). \quad (10.3)$$

Слагаемое в правой части описывает *прямое воздействие* на систему. Величина $f(t)$ входит в выражение для параметра при смещении x , перенормируя этот параметр. Поэтому такое воздействие называют *параметрическим*.

В этой лекции остановимся на прямом воздействии, положив $f(t) = 0$ и рассмотрев уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m. \quad (10.4)$$

Полное решение дифференциального уравнения второго порядка $\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = h(t)$ хорошо известно в теории дифференциальных уравнений. Оно выражается (см., например, Э.Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям») через фундаментальную систему решений уравнения без правой части x_1 и x_2 следующим образом:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + x_2 \int \frac{x_1 h}{W} dt - x_1 \int \frac{x_2 h}{W} dt, \quad (10.5)$$

где вронскиан $W = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2$. В нашем случае уравнения (10.4) $x_1 = \cos(\omega_0 t)$, $x_2 = \sin(\omega_0 t)$, $W = \omega_0$ и общее решение задачи имеет вид

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \frac{1}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \int \cos(\omega_0 t) F(t) dt - \frac{1}{m\omega_0} \cos(\omega_0 t) \int \sin(\omega_0 t) F(t) dt. \quad (10.6)$$

Этот результат легко получить, введя комплексную функцию $\phi = \dot{x} + i\omega_0 x$, аналогичную функции ψ (из (9.8) в предыдущей лекции имеем $\phi = i\sqrt{2\omega_0/m}\psi$). В терминах ϕ уравнение (10.4) переписывается так:

$$\dot{\phi} - i\omega_0 \phi = F/m. \quad (10.7)$$

Подстановка $\phi = A(t)\exp(i\omega_0 t)$ приводит нас к уравнению $dA/dt = F \exp(-i\omega_0 t)/m$, интегрирование которого дает решение в виде

$$\dot{x} + i\omega_0 x = e^{i\omega_0 t} \int \frac{F}{m} e^{-i\omega_0 t} dt = G(t). \quad (10.8)$$

Мнимая часть этого выражения, естественно, совпадает с решением в форме (10.6). Поскольку $\dot{x} = \text{Re}G$, а $x = \text{Im}G/\omega_0$, то полная энергия $E = m\dot{x}^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2 = (m/2)|G|^2$ или

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int F(t) e^{-i\omega_0 t} dt \right|^2. \quad (10.9)$$

Поскольку уравнение (10.4) линейное, то разложив правую часть в ряд или интеграл Фурье, вследствие принципа суперпозиции можно рассмотреть отдельно задачу о монохроматическом воздействии на систему с $F = mf \cos(\omega t)$, сложив потом результаты воздействия сил с разными частотами. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t) / m. \quad (10.10)$$

Его решение очевидно:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t), \quad (10.11)$$

где первое слагаемое соответствует общему решению уравнения без правой части, и полное решение (10.11) содержит две произвольные константы a и α , определяемые начальными условиями для координаты и скорости. Таким образом, общее решение является двухчастотным, содержащим частоты ω и ω_0 . Из (10.11) видно, что при малых частотах $\omega < \omega_0$ частица колеблется в фазе с вынуждающей силой, а при $\omega > \omega_0$ – в противофазе. Таким образом, частное решение можно представить в виде

$$x_0 = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) = a \cos(\omega t) = |a| \cos(\omega t + \delta), \quad (10.12)$$

с фазой $\delta = 0$ при $\omega < \omega_0$ и $\delta = -\pi$ при $\omega > \omega_0$. Графики зависимостей параметров решения от частоты приведены на Рис.10.1 и Рис.10.2.

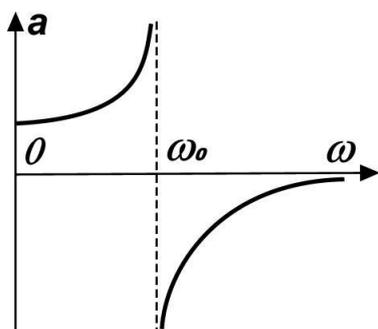


Рис.10.1

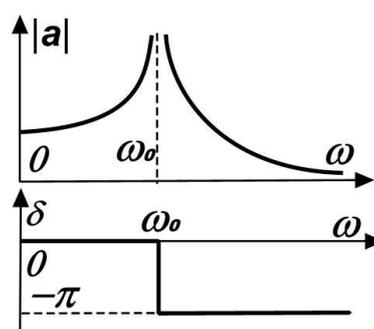


Рис.10.2

Эти графики могут быть продолжены на всю ось частот, и они симметричны относительно замены $\omega \rightarrow -\omega$. При воздействии на систему силы с ее собственной «резонансной» частотой решение имеет особый вид. Подставляя в (10.6) выражение для силы $F = f \cos(\omega_0 t)$, получаем для частного решения

$$x_0 = \frac{f}{m\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (10.13)$$

Явление линейного со временем нарастания амплитуды колебания осциллятора называется *линейным резонансом* (Рис.10.3). В случае воздействия с частотой $\omega = \omega_0 + \varepsilon$, близкой к резонансной ω_0 , могут возникать так называемые *биения* амплитуды, если начальные условия таковы, что возникают колебания и на собственной частоте (Рис.10.4). В этом случае

$$x = A \cos \omega_0 t + B \cos(\omega_0 t + \varepsilon t), \quad (10.14)$$

и усредняя квадрат амплитуды по периоду «быстрого» колебания с частотой ω_0 , вводя среднее $\langle s \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} s(t) d\omega_0 t$ и оставляя «медленную» зависимость с большим периодом $2\pi/\varepsilon$, получим

$$\langle x^2 \rangle = A^2/2 + B^2/2 + AB \cos(\varepsilon t). \quad (10.15)$$

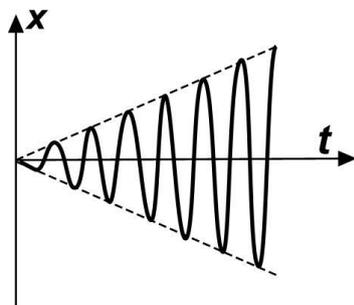


Рис.10.3

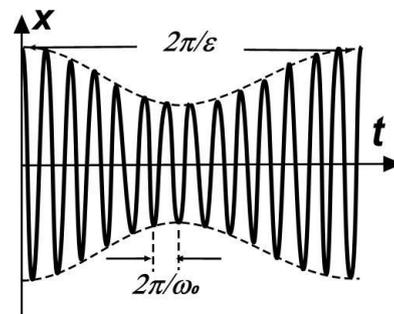


Рис.10.4

Рассмотрим ограниченные во времени воздействия на систему. В случае локализованной во времени силы ее зависимость $F(t)$ может быть разложена в интеграл Фурье, содержащем все временные гармоники. Однако в пределе $t \rightarrow \infty$ «выживает» только гармоника с собственной частотой осциллятора ω_0 . Рассмотрим два примера: короткого импульса внешней силы и медленного «адиабатического» включения и выключения внешней силы. 1). В случае короткого удара по осциллятору с $F(t) = F_0 \delta(t/\tau)$ с $\tau \ll T = 2\pi/\omega_0$, интегрируя уравнение (10.4) по области вблизи $t = 0$, получаем граничное

условие $\dot{x}(+0) - \dot{x}(-0) = F_0\tau/m$. Подставляя в него и условие $x(+0) = x(-0)$ решение общего вида, получаем для $t > 0$ решение (см. Рис.10.5):

$$x = \frac{F_0\tau}{m\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (10.16)$$

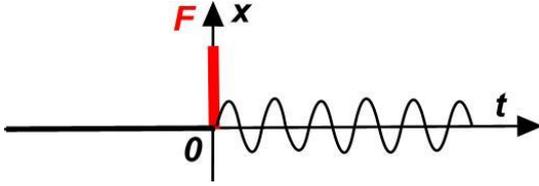


Рис.10.5

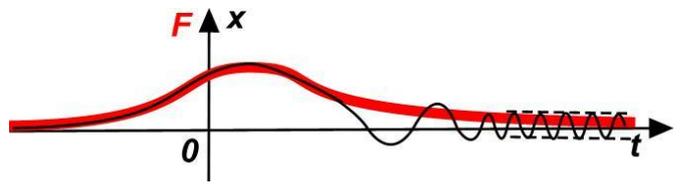


Рис.10.6

2). В случае медленного включения и выключения внешней силы будем моделировать ее функцией $F = F_0/(1+(t/\tau)^2)$ с $\tau \gg T = 2\pi/\omega_0$ и воспользуемся формулой (10.8):

$$x(t \rightarrow \infty) = \text{Im} \frac{F_0}{m\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi t/T} dt}{1+(t/\tau)^2} = \frac{\pi F_0\tau}{2m\omega_0} e^{-\tau/T} \cos \omega_0 t. \quad (10.17)$$

(При вычислении интеграла мы воспользовались теорией вычетов). Т.е. даже при очень медленном выключении силы остаются колебания на основной частоте с экспоненциально малой амплитудой (Рис.10.6).

Дополнительное замечание.

Для описания вынужденного колебания простейшего осциллятора мы использовали уравнение (10.10) для вещественной величины x . Однако, это уравнение может быть записано для комплексной величины ϕ , такой что $x = -(1/\omega_0)\text{Im}\phi$, в комплексном виде (10.7)

$$\dot{\phi} - i\omega_0\phi = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (10.18)$$

Правую часть можно рассматривать, как две эффективные «силы» с разным направлением изменения фазы. При этом амплитуды этих сил одинаковы. Но в механике подобные уравнения могут возникнуть только с одним из этих слагаемых. В лекции №10 рассматривалось уравнение (9.10) $i\dot{\psi} = \omega_0\psi$, описывающее свободное вращение магнитного момента во внешнем постоянном магнитном поле (Рис.36). Это уравнение (уравнение Блоха) для магнитного момента \vec{M} в магнитном поле \vec{H} имеет вид

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = g[\vec{M}\vec{H}], \quad (10.19)$$

где g – так называемое гиромагнитное отношение. Если в дополнении к постоянному полю H , направленному вдоль оси Z , добавить циркулярное поле \vec{h} , вращающееся в перпендикулярной плоскости (XY) с частотой $-\omega$ (см. Рис.10.7), то для комплексной величины $\psi = M_x + iM_y$ получим уравнение

$$i \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 \psi - f \sqrt{1 - \psi \bar{\psi}} e^{-i\omega t} \quad (10.20)$$

с $\omega_0 = gH$ и $f = gh_0$, где h_0 – амплитуда циркулярного поля. Видно, что это уравнение близко к (10.18), но содержит только одно вращающееся поле. Если переменное внешнее поле плоско-поляризовано вдоль одной оси и амплитуда мала ($|\psi| \ll 1$), то уравнение (10.20) эквивалентно уравнению (10.10) для обычного осциллятора. Но оно проще для анализа в более сложных случаях.

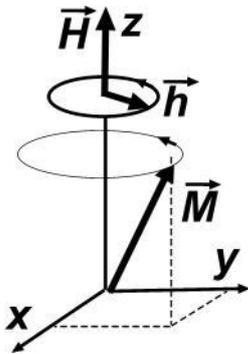


Рис.10.7

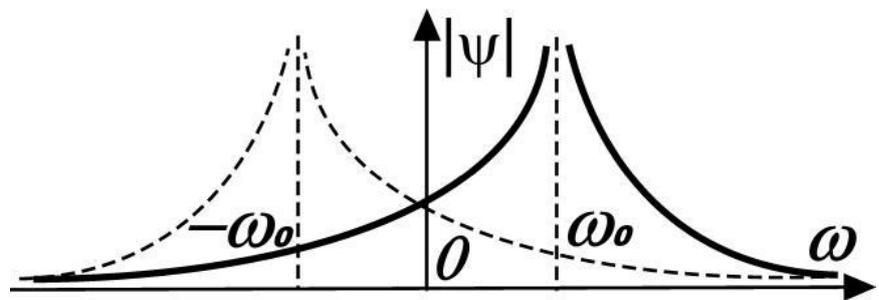


Рис.10.8

Линеаризованное уравнение (10.20) имеет простое решение

$$\psi = \frac{f}{\omega_0 - \omega} e^{-i\omega t}. \quad (10.21)$$

В этом подходе частоты ω и $-\omega$ уже не эквивалентны, и резонансная частота меняет знак при изменении вращения циркулярного поля. График зависимости $|\psi|$ от частоты приведен на Рис. 10.8. Заметим, что он график зависимости амплитуды от частоты симметричен относительно резонансной частоты в отличие от графика на Рис.10.2. Там же пунктиром приведена зависимость при изменении направления вращения переменного поля.